Actividad 3. Funciones

1. Resolver los puntos 1 al 3 y la evaluación del aprendizaje del texto guía, página 33.

2. En grupos de 5 estudiantes elijan una de las 3 funciones del punto 2 en el ejercicio anterior.

a. Inventen un cuento inspirado en su gráfica.

b. En medio pliego de cartulina tabular y graficar la función elegida y sobre la gráfica hacer un dibujo que ilustre el cuento.

c. Cada estudiante del grupo debe escribir el cuento y hacer la ilustración en su cuaderno.

3. Resolver los puntos 3, 4 y la evaluación del aprendizaje del texto guía, página 35. Para la evaluación, se pueden apoyar con Geogebra.

4. Realizar la actividad práctica MatemaTICS de la página 40.

5. Resolver el punto 2 del texto guía, página 41, apoyado con Geogebra.

6. Resolver el punto 1 del texto guía, página 44 y graficar las racionales apoyado en Geogebra.

7. Resolver el problema 11 puntos a. y b. del texto guía, página 44 y hacer el bosquejo de la gráfica.

8. Resolver los problemas 11 y 13 del texto guía, página 49 y hacer el bosquejo de la gráfica.

9. Ver el video de la página sobre operaciones con funciones y resolver el siguiente ejercicio.

Sean $f(x)=x^2$, $g(x)=2x$, $h(x)=\frac{1}{x}$, resolver:

a. $(f+g)(x)=$¿

b. $(f-g)(x)=$¿

c. $(f\cdot g)(x)=$¿

d $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=$¿

e. $(f\circ g)(x)=$¿

f. $\left(\frac{f}{h}\right)(x)=$¿

g. $(f\circ h)(x)=$¿

Lectura tomada de *Malditas matemáticas. Alicia en el país de los números. Carlo Fabretti*. No es necesario imprimir ni copiar, solo leer.

El desierto de trigo

Mientras seguían avanzando por el intrincado laberinto, Alicia le preguntó a Charlie:

—¿Por qué el Cero le tenía tanto miedo a la Minovaca? En el fondo, es inofensiva.

—Para nosotros, tal vez; pero ten en cuenta que los naipes son de cartulina y que las vacas comen papel, pues está hecho de celulosa, igual que la hierba.

Al cabo de un rato, la niña se dio cuenta de que el suelo del laberinto empezaba a cubrirse de una fina gravilla. Una gravilla muy suave y uniforme, que crujía de un modo extraño bajo sus pies. Al agacharse para examinarla de cerca, Alicia exclamó:

—¡Es trigo! ¡El suelo está alfombrado de granos de trigo!

—Eso significa que estamos cerca de la salida

—comentó Charlie sin inmutarse.

Y, efectivamente, poco después, salieron a una inmensa y ondulada extensión amarillenta, un deslumbrante desierto que parecía no tener fin. Sólo que no era un desierto de arena, sino de trigo.

—¿Qué es esto? —preguntó Alicia, con los ojos muy abiertos por el asombro.

—Es la deuda del rey Shirham —contestó Charlie—. Mejor dicho, una pequeña parte de su deuda.

—¿Y a quién le debe tanto trigo?

—Será mejor que te lo cuente él mismo. ¿Ves un puntito negro sobre aquella duna, la más alta? Debe de ser él. Vamos a hacerle una visita.

Tras una larga y fatigosa marcha por el inmenso granero, llegaron a lo alto de la duna. Un anciano de larga barba blanca, con turbante y lujosamente ataviado al estilo oriental, estaba sentado con las piernas cruzadas sobre una alfombra multicolor. A su lado, sobre la alfombra, había un tablero de ajedrez. A unos pocos metros, semihundido en la duna, un gran cuerno vomitaba un incesante y voluminoso chorro de granos de trigo, que resbalaban sobre la suave pendiente como un lento río vegetal.

Alicia se acercó al anciano y, tras saludarlo educadamente, le preguntó:

—¿Es verdad que con todo este trigo estás pagando una deuda?

—Así es —contestó Shirham—. Hace unos dos mil años, cuando yo era rey de la India, el inventor del ajedrez me pidió como recompensa un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, y así sucesivamente, duplicando en cada casilla el número de granos de la anterior.

—Pero eso no puede ser mucho —comentó Alicia.

—Eso pensé yo —dijo el rey con un suspiro—. Pero cuando los matemáticos de la corte calcularon el número de granos que tenía que entregarle al astuto inventor, resultó que no había en el mundo trigo suficiente ni lo había habido desde el origen de los tiempos. Mira, aquí tienes la cuenta.

El rey le tendió a Alicia el tablero de ajedrez.

En cada casilla había un número escrito:

1	2	4	8	16	32	64	128
256	512	1.024	2.048	4.086	8.192	16.384	32.768
65.536	131.072	262.144	524.288	1.048.576	2.097.152	4.194.304	8.388.608
16.777.216	33.554.432	67.108.864	134.217.728	268.435.456	536.870.912	1.073.741.824	2.147.483.648
4.294.967.296	8.589.934.592	17.179.869.184	34.359.738.368	68.719.476.736	137.438.953.472	274.877.906.944	549.755.813.888
1.099.511.627.776	2 199.023.255.552	4.398.046.511.104	8.796.093.022.208	17.592.186.044.416	35.184.372.088.832	70.368.744.177.664	140.737.488.355.328
281.474.976.710.656	562.949.953.421.312	1.125.899.906.842.624	2.251.799.813.685.428	4.503.599.627.370.496	9.007.199.254.740,992	18.014.398.509.481.984	36.028.797.018.963.968
72.057.594.037.927.936	144.115.188.075.855.872	288.230.376.151.711.744	576.460.752.303.423.488	1.152.921.504.606.846.976	2.305.843 009.213.693.952	4.611.686.018.427.387.904	9.223.372.036.854.755.808

—¡Qué barbaridad! —exclamó la niña—. Y encima hay que sumar todas las casillas para saber cuál es el total.

—Eso es muy fácil —intervino Charlie.

—¿Fácil? Una suma con 64 sumandos, y muchos de ellos enormes...

—Fíjate bien; o sea, fíjate de manera ordenada

y empezando por el principio, como diría la Minovaca —dijo el escritor—. Los dos primeros números suman 3, y el tercero es 4; los tres primeros números suman 7, y el cuarto es 8, los cuatro primeros números suman 15, y el quinto es 16...

—¡Ya lo veo! Cada número es la suma de todos los anteriores más uno.

—Exacto. Entonces, la suma de todos los números de esta serie será el doble del último menos uno, o sea, 18.446.744.073.709.551.615. En números redondos, serían unos 18 trillones y medio.

—¿Y eso es mucho? No puedo imaginarme cómo es un trillón.

—Nadie puede imaginárselo, es un número que se sale por completo de la modesta escala humana. Para que te hagas una idea, el cuerno de la abundancia, que figuraba entre los tesoros del rey Shirham, produce un metro cúbico de trigo por segundo, y en un metro cúbico hay unos 15 millones de granos...

—Entonces no puede tardar mucho en pagar la deuda.

—¿Tú crees? Vamos a calcularlo. El cuerno lleva dos mil años produciendo trigo sin parar un solo instante. En un día hay 86.400 segundos, luego en un año hay unos 30 millones. En dos mil años hay, pues, unos 60.000 millones de segundos,

y como cada segundo el cuerno genera 15 millones de granos, en ese tiempo ha producido alrededor de un trillón. A este ritmo, tardará más de 30.000 años en producir los 18 trillones y medio necesarios.

—¡Es terrible! —se estremeció Alicia—. Me dan mareos sólo de pensarlo. Salgamos cuanto antes de este monstruoso desierto de trigo.

—Tal vez el rey tenga la bondad de indicarnos

la forma de salir —comentó Charlie mirando

a Shirham.

—Mi alfombra os llevará —dijo éste—. Pero antes tenéis que jugar conmigo una partida de ajedrez. Y además, como estoy harto de números astronómicos y plazos interminables, tendréis que ganarme en el menor número de jugadas posible.

Acto seguido, el rey sacó de una caja de marfil primorosamente labrada las piezas de ajedrez

y las dispuso sobre el tablero. Colocó las blancas de su lado e hizo el primer movimiento: adelantó una casilla el peón del alfil de rey.

—¿Cómo le vamos a ganar en el menor número de jugadas? —le susurró Alicia a Char-lie—. ¡Y encima juega él con las blancas!

—Eso facilitará las cosas —la tranquilizó el escritor.

—¿Por qué?

—Si el rey nos desafía a ganarle en el menor número de jugadas es porque ello es posible, pues de lo contrario no sería un reto honrado. Y para que sea posible, él tiene que colaborar —explicó Charlie, adelantando una casilla el peón de rey negro.

—¿Y cómo sabemos que es honrado? —le preguntó Alicia en voz baja.

—Un hombre que paga una deuda de 18 trillones

y medio de granos de trigo tiene que ser honrado —sentenció el escritor.

Shirham adelantó dos casillas su peón de caballo de rey y dijo:

—Ahora tiene que jugar la niña, puesto que la primera jugada la ha hecho el hombre.

—Ten en cuenta, Alicia —le advirtió Charlie—, que para que la partida sea la más corta posible tienes que ganar *ya.*

—¿Ya? —exclamó la niña. Observó con atención la disposición de las piezas, y por fin movió la dama en diagonal hasta el borde del tablero—. ¡Jaque mate!

—Muy bien —la felicitó Shirham—, ésta es, efectivamente, la partida más corta posible. Tenía ganas de jugarla. Tomad mi alfombra.

—¿Es una alfombra voladora? —preguntó Alicia.

—Mejor aun —contestó el rey—, es una alfombra deslizadora.

Un bosque de números

Sentados sobre la alfombra con las piernas cruzadas, Alicia y Charlie se deslizaban por la suave pendiente. Era como ir en trineo, pero con trigo en vez de nieve.

—¿Cómo sabemos adónde vamos? —preguntó la niña.

—No lo sabemos, pero da igual. Esto es, en realidad, un gran montón de trigo, y como siempre vamos cuesta abajo (ya que, como sabes, es imposible deslizarse cuesta arriba), acabaremos saliendo del montón.

Efectivamente, poco después llegaron a un extraño bosque cuyos árboles, sin hojas y con las ramas hacia arriba, más bien parecían caprichosos candelabros de distintas alturas y número de brazos.

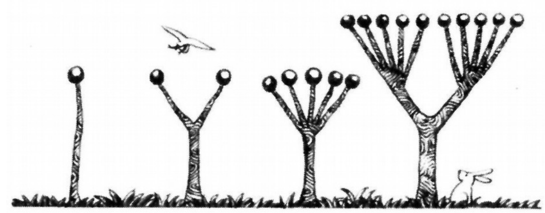
Algunos no medían más de dos metros, y otros eran altísimos, con varios niveles de brazos que se ramificaban de manera curiosamente homogénea. El extremo de cada rama de la copa estaba rematado por una bola tan negra como el resto del árbol.

—Tengo la sensación de que estos árboles significan algo —dijo Alicia, levantándose de la alfombra—, pero no caigo...

—Así es —dijo Charlie—. Estos árboles representan los números. La cantidad de bolas de cada árbol indica el número al que corresponde.

Aquí está el 1, en el que la única rama se confunde con el tronco; por eso es un número tan *singular.* Y el 2, cuyo tronco, naturalmente, se bifurca en dos ramas. Y el 5, que parece una mano abierta...

—¿Y por qué el 10 tiene primero dos ramas que salen del tronco y luego de cada una salen cinco más? —preguntó Alicia.



—Verás, cada árbol tiende a ser lo más alto posible, pero siguiendo siempre esta sencilla regla: todas las ramas de un nivel tienen que sub-dividirse en el mismo número de ramas en el nivel siguiente.

—Por eso, en el 10, las dos ramas del primer piso se dividen en cinco ramas cada una en el piso siguiente.

—Exacto. Y por eso los números primos, como el 2 y el 5, o el 17, que está al lado del 10, sólo tienen un «piso», como tú los llamas.

—¿Y por qué están en desorden? En la primera fila, el 1, el 2, el 5, el 10, el 17... En la segunda, el 4, el 3, el 6, el 11...

—No está en desorden —replicó Charlie, sacando su lápiz y un cuaderno de bolsillo y escribiendo en él una serie de números—. Siguen esta disposición...

1	2	5	10	17	26	37
4	3	6	11	18	27	38
9	8	7	12	19	28	...
16	15	14	13	20	29	
25	24	23	22	21	30	
36	35	34	33	32	31	

—¡Pues que disposición tan rara! —comentó

Alicia.

—Sólo en apariencia. Si te fijas, los números sucesivos van formando cuadrados cada vez más grandes —señaló Charlie, y enmarcó varios grupos de números.

1	2	5
4	3	6
9	8	7

—Ah, ya lo veo.

—Por eso la primera columna es la serie de los cuadrados perfectos: 1, 4, 9, 16, 25, 36...

A medida que se adentraban en el bosque, los árboles crecían en tamaño y altura.

—¿Sabemos a donde vamos? —preguntó entonces

Alicia.

—Alguien dijo que un matemático es un hombre perdido en un bosque de números —contestó

Charlie soñador.

—¿Y por qué no una mujer? —replicó Alicia, que de vez en cuando planteaba reivindicaciones feministas.

—Porque entonces no sería un matemático, sino una matemática. Pero sí, tienes razón, la frase también vale para ti en este momento.

—¿Acabamos de entrar y ya estamos perdidos?

—Es sólo una forma de hablar. En realidad, entre los números es difícil perderse, porque suelen seguir algún tipo de pauta. Ahora, por ejemplo, nos interesa cruzar el bosque en diagonal,

y para ello sólo tenemos que seguir la serie 1, 3, 7, 13, 21, 31... —dijo Charlie, señalando con su lápiz la diagonal del cuadrado de números que acababa de componer en su cuaderno.

—¿Y tenemos que continuar haciendo cuadrados cada vez más grandes para averiguar los números siguientes?

—No hace falta. Si te fijas, la serie sigue una pauta sencilla: 3 es 1 + 2, 7 es 3 + 4, 13 es 7 + 6, 21 es 13 + 8...

—¡Ya lo veo! Cada vez se suman dos más al número anterior: 31 es 21 + 10, luego el siguiente será 31 + 12, o sea, 43 —dedujo Alicia.

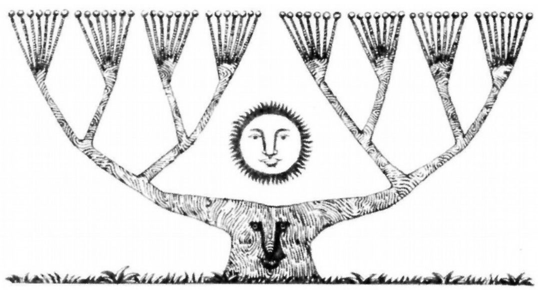
—Exacto. Así que para estar seguros de cruzar el bosque en diagonal, sólo tenemos que ir comprobando de vez en cuando que pasamos junto a los árboles de esa serie.

—Sí, pero los números se hacen cada vez mayores y es una lata tener que contar tantas bolas.

—El cómputo se puede simplificar mucho con un poco de método. Por ejemplo, acabo de darme cuenta de que nos hemos desviado un poco hacia la izquierda, porque para seguir la diagonal deberíamos haber pasado junto al 57, y éste es el 56.

—¿Cómo has podido contar las bolas tan deprisa? —se sorprendió Alicia.

—El árbol tiene cuatro niveles de ramas: en los tres primeros niveles, de cada bifurcación salen dos ramas, y en el cuarto nivel de cada rama salen siete. Por lo tanto, no tienes más que multiplicar 2x2x2x7 para saber que hay 56 bolas. Al crecer lo más posible siguiendo la regla que te he dicho antes, los árboles descomponen cada número en sus factores primos.



—O sea, factores lo más pequeños posibles, para que haya más niveles de ramas.

—Exacto: cuantos más factores, más niveles, y los factores más pequeños son siempre primos, porque si no aún podrían descomponerse en otros factores —dijo Charlie.

—¿Conoces otros trucos para contar deprisa y sin esfuerzo?

—Desde luego. Te voy a contar uno muy bueno que descubrió un niño de tu edad. Se llamaba

Carl Friedrich Gauss, y llegó a ser uno de los matemáticos más grandes de todos los tiempos. Un día, en el colegio, un profesor mandó a toda la clase, como castigo, sumar los números del 1 al 100...

—¿Ves como los profes de mates son unos cenutrios? —Alicia no sabía muy bien lo que significaba *cenutrio,* pero le parecía un insulto de lo más contundente.

—Algunos sí —admitió Charlie—. El caso es que con el pequeño Gauss esta cenutriez no dio resultado, pues efectuó la suma en apenas unos segundos.

—¿Cómo pudo hacerlo?

—Pues muy sencillo. Se dio cuenta de que podía emparejar los cien primeros números de la siguiente forma:

$$1 + 100= 101$$

$$2 + 99= 101$$

$$3 + 98= 101$$

$$48 + 53= 101$$

$$49 + 52= 101$$

$$50 + 51 = 101$$

—De este modo, se obtiene cincuenta veces 101, por lo que la suma total es 50 x 101 = 5.050.

—Muy astuto, el pequeño Gauss.

—Sin proponérselo, había descubierto la fórmula que expresa la suma de los miembros de una progresión aritmética.

—Ya estás hablando otra vez como un profe — se quejó Alicia.

—Tranquila, que enseguida te lo explico. Una progresión aritmética es, sencillamente, una serie de números en la que cada uno es igual al anterior más una cantidad fija, que se llama «razón». La progresión aritmética más sencilla es, precisamente, la serie de los números naturales:

1, 2, 3, 4, 5..., porque cada número es igual al anterior más 1. La serie de los números impares:

1, 3, 5, 7, 9...

—Es una progresión aritmética de razón 2; y la de los pares también —concluyó Alicia.

—Exacto. ¿Ves como es muy sencillo?

—Sí, pero ¿qué necesidad hay de usar palabrejas como «progresión aritmética», «razón» y todo eso? Es más fácil decir que a los números se les va sumando 1 cada vez, o 2...

—¿Tienes algún animal en tu casa? —preguntó entonces Charlie, cambiando aparentemente de tema.

—Sí, un gato siamés.

—¿Y por qué utilizas palabrejas como «gato» y «siamés»? Es más fácil decir «un anima-lito peludo que caza ratones y hace miau».

—¡No es lo mismo! —protestó Alicia.

—Sí que es lo mismo: poner nombres a las cosas y usar esos nombres es más cómodo y eficaz que describirlas cada vez que hablamos de ellas. Ahora que sabes lo que es una progresión, es mucho más práctico usar esa palabra que decir «una serie de números en la que cada uno es igual al anterior más una cantidad fija», del mismo modo que es más cómodo y más preciso decir «gato» que «animalito peludo que caza ratones y hace miau».

—Está bien, está bien. Pero reconocerás que hay personas que usan un montón de palabrejas para darse importancia y hacernos creer que saben mucho.

—Por desgracia, eso es muy cierto —admitió

Charlie—. El mundo está lleno de charlatanes, embaucadores y pedantes. Pero eso no es culpa de las palabrejas, sino de quienes las usan mal. Volviendo a las progresiones...

El escritor se detuvo junto al frondoso 343 (de cuyo tronco salían siete ramas, de cada una de las cuales salían otras siete, que a su vez se subdividían en siete más), sacó el cuaderno y el lápiz, y empezó a escribir.

—¿Qué haces? —preguntó Alicia.

—Como muy bien has dicho, la serie de los números pares (2, 4, 6, 8, 10...) también es una progresión aritmética. Vamos a calcular la suma de sus diez primeros términos.

—¿Usando el truco del pequeño Gauss?

—Sí, pero vamos a hacerlo de una forma ligeramente distinta para verlo más claro. Primero escribo esos diez primeros términos en su orden normal y luego, debajo, en orden inverso...

$$\begin{array}{cccccccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 \\ 20 & 18 & 16 & 14 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \end{array}$$

—¿Para qué los escribes dos veces?

—Ahora sumamos las dos series, y vemos que diez veces 22 (que es 20 + 2, o sea, el primer término más el último) es el doble de la suma de los diez términos, ya que los hemos contado todos dos veces. Por lo tanto, la suma que buscamos será 22 x 10 / 2 = 110.

$$\begin{array}{rcccccccccc} & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 \\ + & 20 & 18 & 16 & 14 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ \hline & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 \end{array}$$

—Y esto se puede hacer con todas las progresiones aritméticas —comentó Alicia.

—Claro. Si llamamos p al primer término de una progresión aritmética cualquiera, u al último, n al número de términos y S a su suma, tenemos que $S = (p + u)\, n / 2.$ En el caso de los cien primeros números, p es 1, u es 100 y n también es 100; luego S = (1 + 100) x 100/2= 101 x 50 = 5.050, como ya sabíamos.

Echaron a andar de nuevo y, tras una pausa, Alicia preguntó:

—¿Los granos de trigo del tablero de ajedrez también forman una progresión?

—Sí, pero geométrica, porque cada número se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad fija, y no sumándosela como en la progresión aritmética. La serie 1, 2, 4, 8, 16, 32... es una progresión geométrica de razón 2, porque cada número es igual al anterior multiplicado por 2.

Pero Alicia ya no le escuchaba: estaba husmeando el aire con delectación.

—¡Huele a tarta de manzana! —exclamó.