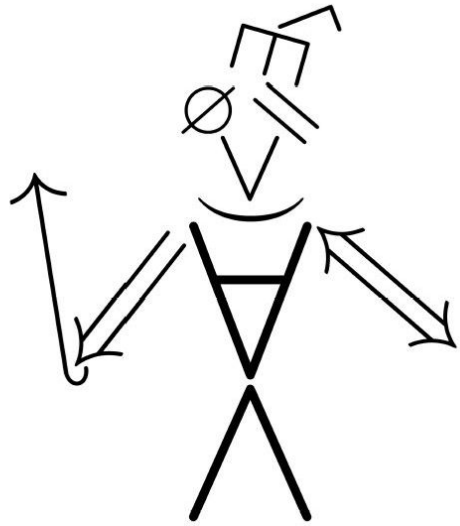
PROPOSICIONES CON CUANTIFICADORES

En algunas proposiciones se utilizan palabras como “algunos”, “todos”, “existen”, que permiten cuantificar los objetos que cumplen la condición puesta en consideración.



πkasle Josué Tonelli-Cueto

Ejemplo:

a. Todos los días hay clase de cálculo.

b. Existen algunos comestibles que son perjudiciales para la salud.

c. Todos los pájaros vuelan.

d. Existen algunos automóviles con cinco llantas.

e. Algunos humanos no comen carne.

f. Todas las clases son importantes.

Nos podemos dar cuenta que si ***p(x)*** *es* una proposición abierta donde ***x*** toma valores de un conjunto universal dado, puede formarse una proposición anteponiendo a ***p(x)*** las expresiones “para todo x” o “existe”, denominadas ***Cuantificador Universal*** y ***Cuantificador Existencial,*** respectivamente. El cuantificador universal “para todo x” se simboliza $\forall \boldsymbol{x}$ y el cuantificador existencial “existe un x” $\exists \boldsymbol{x}$.

Ejemplo:

Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

a. $(\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \ / \ \boldsymbol{x}^2 = -\mathbf{1})$ Se lee: Existe un ***x*** que pertenece al conjunto de los números reales, tal que ***x*** al cuadrado es igual a menos uno.

R/ Esta proposición es falsa, pues en los números reales no existe un número que al elevarlo al cuadrado de cómo resultado un número negativo.

b. $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}/\boldsymbol{x} + \mathbf{1} > x)$ Se lee: Para todo ***x*** que pertenece al conjunto de los números reales, ***x+1*** es mayor que ***x***.

R/ Esta proposición es verdadera, pues todos los números reales son menores a sí mismos aumentados en una unidad.

c. $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^+/-\boldsymbol{x} < 0)$ Se lee: Para todo ***x*** que pertenece al conjunto de los números enteros positivos, ***-x*** es menor que ***0***.

R/ Esta proposición es verdadera, pues el inverso aditivo de todo número entero positivo es menor que cero.

d. $(\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}/\boldsymbol{x}^{-1}\ \boldsymbol{no\ existe})$ Se lee: Existe un ***x*** que pertenece al conjunto de los números reales talque ***x*** a la menos uno no existe.

R/ Esta proposición es verdadera, pues si ***x = 0***, x^{-1} no existe.

EJERCICIO:

1. Dadas las siguientes proposiciones abiertas:

***p(x)*: x**^{2} es par.

***q(x)*: x** es entero negativo.

***r(x)*: x** es racional.

Escribe el significado de las siguientes proposiciones e indica el valor de verdad de cada una:

a. $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}/\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}))$

b. $(\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}/\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}))$

c. $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{Q}/\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) \vee \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}))$

d. $(\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{Q}/\sim \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) \rightarrow (\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})))$

2. Escribe en forma simbólica las siguientes proposiciones:

a. Existe un número real que elevado al cuadrado es cero.

b. Todo número real elevado al cuadrado es positivo.

c. Todos los números primos son impares.

d. Existe un número primo que es par.

3. Determina el valor de verdad de las proposiciones del punto 2.

4. Realice una historieta (tira cómica) de mínimo 9 escenas con situaciones donde estén presentes las proposiciones con cuantificadores.

Lectura tomada de *Malditas Matemáticas. Alicia en el País de Los Números. Carlo Frabetti.* (No es necesario imprimir ni copiar, solo leer).

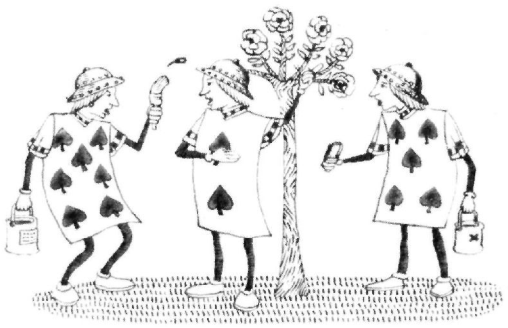
El agujero de gusano

—No ocurrió realmente así, ¿verdad? —dijo Alicia tras una pausa.
—No. Como ya te he dicho, lo que te he contado no es la historia de los números, sino un cuento. La verdadera historia es más larga y más complicada; pero, en esencia, viene a ser lo mismo.
Lo importante es que comprendas por qué un uno al lado de otro uno significa once y no dos.
—Cuéntame más cuentos de números —pidió la niña.
—Creía que detestabas las matemáticas.
—Y las detesto; pero me gustan los cuentos. También detesto a las ratas, y sin embargo me gustan las historias del ratón Mickey.
—Puedo hacer algo mejor que contarte otro cuento: te invito a dar un paseo por el País de los Números.
— ¿Está muy lejos?
—Aquí mismo. Sígueme.
El hombre se dio la vuelta y desapareció entre los matorrales de los que había salido unos minutos antes. Sin pensárselo dos veces, Alicia lo siguió.
Oculta por la vegetación, había una gran madriguera, en la que aquel estrafalario individuo se metió gateando.
«Qué raro que haya una madriguera tan grande en el parque», pensó la niña mientras entraba tras él.
«Si es de un conejo, debe de ser un conejo gigante; aunque en realidad no creo que haya conejos sueltos por aquí...»
La madriguera se hundía en la tierra oblicuamente y, aunque estaba muy oscura, Alicia lograba ver la silueta del matemático, que avanzaba a un par de metros por delante de ella.
De pronto el hombre se detuvo. Alicia llegó junto a él y vislumbró en el suelo un agujero de aproximadamente un metro de diámetro. Se asomó y sintió vértigo, pues parecía un pozo sin fondo, del que emanaba un tenue resplandor grisáceo. Ai mirar con más atención, se dio cuenta de que era una especie de remolino, como el que se formaba en el agua de la bañera al quitar el tapón. Era como si la oscuridad misma se estuviera colando por un desagüe.
—Es un agujero de gusano —dijo él—. Conduce a un mundo paralelo.
A Alicia le sonaba lo de los agujeros de gusano y los mundos paralelos, pero no sabía de qué.
—Debe de ser un gusano muy grande —comentó con cierta aprensión.
—No hay ningún gusano. Este agujero se llama así porque horada el espacio-tiempo igual que los túneles que excavan las lombrices horadan la tierra.
— ¿Tiene algo que ver con los agujeros negros?
—Mucho. Pero ya te lo explicaré otro día, cuando hablemos de física. Por hoy tenemos bastante con las matemáticas.
Dicho esto, saltó al interior del remolino y desapareció instantáneamente, como engullido por una irresistible fuerza de succión.
—Estás loco si crees que voy a saltar ahí dentro
—dijo la niña, aunque sospechaba que él ya no podía oírla. Pero la curiosidad, que en Alicia era más fuerte que el miedo e incluso que la pereza, la llevó a tocar el borde del remolino con la punta del pie, para ver qué consistencia tenía.
Fue como si un tentáculo invisible se le enrollara a la pierna y tirara de ella hacia abajo. Empezó a girar sobre sí misma vertiginosamente, como una peonza humana, a la vez que descendía como una flecha por el remolino. O más bien como una bala, pensó la niña, pues había oído decir que las balas giran a gran velocidad dentro del cañón para que luego su trayectoria sea más estable. Curiosamente, no tenía miedo, ni la mareaba la vertiginosa rotación, ni sentía ese vacío en el estómago que notaba cuando en la montaña rusa se precipitaba hacia abajo.
De pronto, tan bruscamente como había comenzado, cesó el blando abrazo del remolino y cayó con gran estrépito sobre un montón de hojas secas.
Alicia no sintió el menor daño y se puso en pie de un brinco. Miró hacia arriba, pero estaba muy oscuro. Le pareció ver sobre su cabeza, a varios metros de altura, un círculo giratorio algo menos negro que la negrura envolvente. Hacia delante, sin embargo, se veía un punto de luz, que era el final de un largo pasadizo. Lo recorrió a toda prisa, y desembocó en un amplio vestíbulo, iluminado por una hilera de lámparas colgadas del techo. Alrededor de todo el vestíbulo había numerosas puertas, y ante una de ellas estaba el hombre con una llave de oro en la mano, disponiéndose a abrirla.
Alicia corrió junto a él, y éste hizo girar la llave en la cerradura y abrió la puerta. Daba a un estrecho pasadizo al fondo del cual se veía un espléndido jardín.
—Adelante —dijo el matemático con una enigmática sonrisa, y la niña lo precedió por el pasadizo.

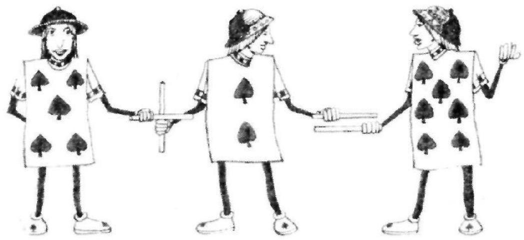
El País de los Números

El pasadizo llevaba al más hermoso jardín que Alicia jamás había visto. Rodeada de alegres flores y arrullada por el rumor de las frescas fuentes, sintió una alegría tan intensa que casi se le saltaron las lágrimas.

La sacó de su embelesamiento un extraño personaje que pasó corriendo ante ella. Era un gran naipe con Cabeza, brazos y piernas, que llevaba un bote de pintura en una mano y una brocha en la otra.
— ¡Yo conozco este sitio! — exclamó entonces la niña—. ¡Es el País de las Maravillas de Alicia!
—No exactamente, pero se le parece bastante —dijo el hombre a su lado—, del mismo modo que tú no eres la misma Alicia, pero te pareces mucho a ella.
— ¡Y tú eres el autor, Lewis Carroll! Ya decía yo que me sonaba tu cara. He visto una foto tuya en algún sitio. —Mi verdadero nombre es Charles Dodg-son, para servirte — dijo él, con una ligera inclinación de cabeza—. Lewis Carroll es el seudónimo que usaba cuando escribía cuentos y poemas. Puedes llamarme Charlie... Ven, vamos a ver qué hacen esos muchachos.



Los tres naipes —que eran el 2, el 5 y el 7 de picas— estaban atareados alrededor de un rosal en el que había seis rosas blancas. O, mejor dicho, que Había sido blancas, pues estaban terminando de pintarlas. Uno tenía un bote de pintura roja, otro de pintura rosa y el tercero de pintura amarilla, y estaban pintando dos rosas de cada color.
Mientras Alicia y Charlie se acercaban, los hombres naipe terminaron su tarea y se pusieron a discutir acaloradamente.
— ¿Algún problema, muchachos? —preguntó el escritor.
—Pues sí —contestó Siete—. La Reina de Corazones quiere que en cada rosal haya rosas de varios colores...
—Y varias de cada color —prosiguió Cinco.
—Y el mismo número de cada color —concluyó Dos.
—Pues lo habéis conseguido —dijo Alicia—, no veo dónde está el problema: aquí hay dos rojas, dos rosas y dos amarillas; o sea, varios colores, varias de cada color y las mismas de cada color.
—Sí, claro, con seis rosas es fácil —dijo Siete—, y también con ocho o con nueve.
—Pero allí hay un rosal con siete rosas —prosiguió Cinco, señalando hacia su derecha. Y, efectivamente, Alicia vio un macizo con siete rosas blancas.
—Y ése no sabemos cómo pintarlo —añadió Dos.
—Si pintamos tres de rojo y cuatro de rosa, habrá varios colores y varias rosas de cada color, pero no el mismo número de cada color —dijo Siete.
—Si pintamos cada una de un color, como un arco iris, habrá varios colores y las mismas de cada color, pero no habrá varias de cada color, sino sólo una —dijo Cinco.
—Y si las pintamos todas del mismo color, habrá varias de cada color y el mismo número de cada color, pero no varios colores —añadió Dos.
—En cualquier caso —concluyó Charlie—, se incumple una de las tres condiciones de la Reina, puesto que con siete rosas no es posible cumplirlas las tres a la vez. Yo os aconsejo que dejéis el rosal tal y como está, con todas las rosas blancas, y le digáis a la Reina que su blancura muestra que 7 es un número primo, es decir, que no es divisible en partes enteras iguales.
—Se puede dividir en siete partes de una rosa —objetó Alicia.
—Sí, claro, y en una sola parte de siete rosas: los números primos sólo son divisibles por sí mismos y por la unidad — precisó a continuación Charlie.
En ese momento se oyó sonar una trompeta, y los tres naipes se echaron a temblar; parecían grandes hojas rectangulares agitadas por el viento.
—¡La Reina! —exclamaron a coro.
Y, en efecto, a los pocos segundos apareció la Reina de Corazones con su séquito.
Rápidamente, los hombres naipe escondieron las brochas y los botes de pintura tras unos arbustos y sacaron cuatro palitos negros; Dos tomó uno en cada mano, los otros, uno cada uno, y adoptaron la siguiente posición:



—¿Qué hacen? —preguntó Alicia.
—Forman matemáticamente para que la Reina les pase revista: 5 + 2 = 7 —explico Charlie a la niña.
Pero toda la atención de la Reina de Corazones estaba dirigida a los rosales. Al fijarse en el macizo de las siete rosas blancas, exclamó enfurecida:
—¡Este rosal no cumple mis especificaciones!
Los tres naipes estaban temblando tan violentamente que no podían ni hablar; pero Charlie avanzó con decisión hacia la Reina para interceder por ellos.
—Majestad —dijo—, permitidme que, como matemático, os recuerde que vuestras instrucciones eran irrealizables en el caso del rosal con siete rosas; pero de este modo habéis hecho que se ponga de manifiesto su condición de número primo, por lo que esas rosas blancas destacan entre sus variopintas compañeras con la prístina belleza de las verdades matemáticas.

—*Mmm…* Sí, después de todo, no quedan mal unas cuantas rosas blancas entre tanto colorín colorado, y este cuento se ha acabado —dijo la Reina—. Aunque debo añadir que nunca me han gustado los números primos.
Los jardineros se echaron a temblar de nuevo, pues ellos tres eran números primos: 2, 5 y 7.
—No debéis preocuparos por ellos, majestad —dijo Charlie—, pues están en franca minoría frente a los números compuestos.
—Pero aparecen donde una menos se lo espera. Y los hay de todos los tamaños.
—Eso es cierto, majestad. Pero podéis encontrar listas de números compuestos consecutivos tan largas como queráis, sin ningún primo entre ellos.
—¿De veras? ¿Puedes decirme una lista de cien números consecutivos sin ningún primo?
—Nada más fácil, majestad. Consideremos el producto de los 101 primeros números: 1 x 2 x 3 x 4 x… x 98 x 99 x 100 x 101. Los matemáticos lo llamamos «factorial de 101» y lo expresamos así: 101!
—Un número en verdad admirable —comentó la Reina.
—Llamemos *N* a este número enorme, que será divisible por 2, 3, 4, 5, ... , 98, 99, 100 y 101, ya que los contiene a todos ellos como factores.
—Evidente.
—Pues bien, formemos ahora la sucesión *N + 2, N + 3, N + 4, N + 5, ... , N + 98, N + 99, N +* 100 y *N+* 101. Como *N* es divisible por 2, también lo será *N +* 2; como *N* es divisible por 3, también lo será *N +* 3, etc., por lo que tenemos una serie de cien números consecutivos (de *N* + 2 a *N* + 101), ninguno de los cuales es primo.
—¡Qué buena noticia! —exclamó la Reina complacida—. ¡Sucesiones de números todo lo largas que yo quiera sin ningún antipático primo entre ellos! Voy a recompensarte por tu astucia: te nombro mi *Joker.*
—¿Qué es eso? —preguntó Alicia.
—Mi Bufón, el Comodín de mi baraja —contestó la Reina—. Y, por cierto, ¿tú quién eres, mocosa?
—Es mi joven amiga Alicia, majestad —intervino Charlie—. Me disponía a mostrarle el País de los Números, con vuestra venia.
—Está bien; si es amiga tuya, la tomaré también a mi servicio, como aprendiza de doncella de segunda clase.
Alicia iba a replicar, pero Charlie se adelantó:
—Me temo, majestad, que no podemos aceptar vuestro generoso ofrecimiento, porque...
—Yo no hago ofertas, lechuguino, yo doy órdenes —lo cortó la Reina. Hizo un gesto con la mano, y de su séquito se adelantaron dos pajes.
Uno le encasquetó en la cabeza al escritor un gorro de bufón, rojo y con tres largas puntas terminadas en cascabeles, y el otro le puso a Alicia una cofia blanca. La niña se la quitó con un gesto brusco y la tiró al suelo.
—No voy a llevar esa cosa ridicula ni pienso ser la doncella de nadie —dijo con determinación.
La Reina se puso roja de cólera y aulló:
—¡Insurrección, rebeldía, desacato! ¡Guardias, detenedlos!
—¡Ja! ¿Es que no sabes quién es él? —replicó Alicia señalando a Charlie; y lo dijo con tal aplomo que, por un momento, la Reina se quedó desconcertada.
—No le hagáis caso, majestad, es sólo una niña y… —empezó a decir el escritor; pero Alicia lo interrumpió:
—Él es nada menos que Lewis Carroll, tu autor, y puede hacerte desaparecer si lo desea.
La Reina no pareció impresionada por la revelación.
—¿Conque desaparecer, eh? —dijo con los brazos en jarras—. Acabas de darme una buena idea, mocosa. ¡Que venga el Cero!
Los miembros del séquito se apartaron apresuradamente para dejar paso a un hombre naipe similar a los tres jardineros, pero con el anverso completamente en blanco.
—¿Llevas tus armas reglamentarias? —le preguntó la Reina.
—Sí, majestad —respondió Cero a la vez que sacaba dos palitos negros, uno en cada mano, que juntó formando una *X.* Ante aquel signo, todos retrocedieron espantados.
—¿Por qué le tienen tanto miedo? —le preguntó Alicia a Charlie en voz baja.
—Es el Cero y lleva el signo de multiplicar —contestó el escritor—. Ya sabes que cualquier cosa, al multiplicarla por cero, desaparece.
—Llévalos al calabozo —le ordenó la Reina al Cero—. Y si se resisten, ya sabes.
—¡No tenemos por qué obedecer! —le dijo Alicia a Charlie—. Tú eres el autor, son tus personajes...
—Los personajes acaban teniendo vida propia, y algunas veces hasta se rebelan contra su autor, igual que hacen algunos hijos con sus padres. De momento, será mejor que obedezcamos.
Así que Alicia y Charlie se pusieron en marcha, precedidos por dos guardias y seguidos de cerca por Cero, que esgrimía amenazador su signo de multiplicar.
Pero en cuanto estuvieron fuera de la vista de los demás, el escritor se paró en seco y dijo, señalando su vistoso gorro:
—Soy el Comodín, ¿no es cierto?
—Sí —convino el Cero—. La Reina acaba de nombrarte su *Joker.*
—Y el Comodín puede tomar el valor de cualquier naipe de la baraja, ¿no es verdad?
—Así es —admitieron a coro los guardias.
—Pues bien, ahora soy la Reina de Corazones, y os ordeno que os marchéis.
—¡Qué magnífica jugada! —exclamó Alicia—. ¡Bravo, Charlie, eres un genio!

Los guardias se miraron desconcertados y luego miraron a Cero, que se rascó la cabeza con uno de sus palitos negros y dijo:
—Técnicamente, tiene razón.
—Pues ya podéis iros técnicamente —los conminó Alicia, haciendo con la mano un displicente gesto de despedida.
Los dos guardias se marcharon cabizbajos, pero Cero parecía indeciso.
—Tú puedes venir con nosotros —dijo por fin Charlie—; así nos defenderás de eventuales peligros con tu poder aniquilador.
—¿Y adonde vamos ahora? —preguntó entonces Alicia.
—Al laberinto —contestó el escritor.
—¡Yo no puedo entrar en el laberinto! —exclamó Cero echándose a temblar.
—Bueno, si te portas bien, tal vez te deje quedarte fuera —dijo Charlie magnánimo—; pero nos acompañarás hasta allí.
Anduvieron por el jardín durante un buen rato, entre espléndidos macizos de flores y fuentes cantarinas, hasta que llegaron a un alto y tupido seto de ciprés que parecía prolongarse indefinidamente en ambas direcciones, y en el que sólo se veía una estrecha abertura vertical a modo de entrada.
—El laberinto —dijo Charlie—. Hemos de cruzarlo para llegar al otro lado.
—Para llegar al otro lado de algo, siempre hay que cruzarlo —comentó Alicia.
—No siempre —replicó el escritor—. Algunas cosas puedes rodearlas; por ejemplo, para ir al otro lado de ti, es más fácil rodearte que cruzarte.
Pero el laberinto hay que cruzarlo.
—¿Y por qué no podemos rodearlo? —preguntó la niña.
—Porque para entender lo que encontraremos al otro lado, antes tienes que entender lo que encontraremos ahí dentro. No basta llegar a los sitios con los pies: hay que llegar también con la cabeza.
—Pues yo, precisamente porque quiero que mi cabeza y mis pies sigan yendo juntos, no pienso entrar ahí —dijo Cero con convicción.
—¿Por qué te asusta tanto el laberinto? —preguntó Alicia—. Si tienes tu arma aniquiladora...
—Ninguna arma sirve contra... —empezó a decir Cero temblando violentamente; pero no pudo acabar la frase porque, sólo de pensarlo, se desmayó del susto y quedó tendido boca arriba sobre la hierba.
—Podemos aprovechar para descansar un rato —propuso Alicia, sentándose en el suelo junto al inconsciente naipe.
—Buena idea —dijo Charlie, tomando asiento a su vez.
—A ver si cuando vuelva en sí nos explica por qué le tiene tanto miedo al laberinto —comentó la niña.
—No se te ocurra preguntárselo otra vez, o volverá a desmayarse.
—¡Qué rara es aquí la gente, si es que se la puede llamar gente! —exclamó Alicia—. Y, hablando de rarezas, ¿por qué la Reina les tiene tanta manía a los pobres números primos?
—Porque no siguen ninguna pauta, y la Reina es una maniática de la ley y el orden.
—¿Qué quiere decir eso de que no siguen ninguna pauta?
—Los múltiplos de 2 (que coinciden con los números pares) van de dos en dos, los múltiplos de 3 van de tres en tres, y así todos los números compuestos, es decir, los que tienen divisores; pero los primos no aparecen en la lista de los números de manera regular: a veces hay dos muy juntos, como el 11 y el 13 o el 71 y el 73, y otras veces dos primos consecutivos están muy distanciados (de hecho, como le he explicado antes a la Reina, podemos hallar primos consecutivos tan distanciados como queramos). Total, que no hay forma de saber de antemano dónde aparecerán los primos. Dicho de otra manera, no hay ninguna fórmula que permita obtener todos los números primos, mientras que con los demás números eso sí es posible.
—¿Cómo?
—Por ejemplo, todos los números pares son de la forma $2n$, donde n es cualquier número: si vamos dando a n todos los valores posibles (1,2, 3, 4, 5...), obtenemos todos los números pares (2, 4,6,8,10...).
—¿Y los impares?
—Todos los números impares son de la forma $2n + 1$; aunque, en este caso, para obtener la lista completa hemos de empezar por $n = 0$: para $n = 0$, $2n + 1 = 1$; para $n = 1$, $2n + 1 = 3$; para $n = 2$, $2n + 1 = 5$. Y así sucesivamente.
—Y si no hay ninguna fórmula para los números primos, ¿cómo podemos hacer su lista? —preguntó Alicia.
—Eliminando los que no son primos.
—¿De qué manera?
—Igual que se separa la harina del salvado o la arena de los guijarros: con una criba.